

Из (3), последовательно используя (10), (8) и (6), получаем

$$bx^3 + ay^3 - ax^2y - bxy^2 - cx^2 - cy^2 + 2(d-2)xy + 2bx + 2ay - 2c = 0, \quad (11)$$

где x, y - гномонические координаты точек изогир;

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2, & b &= b_1 + b_2, \\ c &= a_1b_2 + a_2b_1, & d &= a_1a_2 + b_1b_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, мы получили математическую модель изогир в виде уравнения третьей степени в гномонических координатах. Оно может быть приведено к кубическому уравнению $y^3 + py^2 + qy + r = 0$, которое имеет аналитическое решение [13].

Уравнение (11) подстановкой вместо x и y их значений из формул (4) можно преобразовать в "истинное" уравнение изогир, соответствующее реально наблюдаемой форме изогир. В результате будет получено сложное уравнение шестой степени, состоящее из 16 членов. Оно не имеет аналитического решения и потому для практических целей непригодно. По этой причине расчет координат точек изогир по заданным направлениям оптических осей нужно производить с использованием гномонического уравнения (11), а полученные результаты пересчитывать в ортогональные координаты x' и y' по формулам (4).

Следует заметить, что подобный пересчет не потребует при проецировании на экран коноскопической картины, полученной с точечным источником света. В таком случае уравнение изогир справедливо для коноскопической картины в своем первоначальном виде.

Результаты расчета изогир, проведенные по уравнению (11) в разных сечениях одноосных и двуосных кристаллов для различных углов поворота столика микроскопа, показали, что отображаемая на экране монитора изогир полностью соответствуют реально наблюдаемой коноскопической картине.

Особый интерес представляют результаты построения осевой линии изогир на полной ортогональной проекции при коноскопическом угле, равном 90° (рис. 4). Они позволяют воссоздать виртуальную коноскопическую картину за пределами поля зрения коноскопа, недоступную для наблюдения при работе с обычными объективами из-за их ограниченной апертуры. Выяснилось, что балки креста одноосного кристалла выглядят прямыми лишь в пределах поля зрения коноскопа при работе с объективом $60\times$ (малый круг внутри большого круга, рис. 4а). За его пределами две балки смыкаются на краю проекции в точке, удаленной на 45° от осей координат, в квадранте, в котором находится оптическая ось. Два других конца балок, искривляясь, упираются в край про-

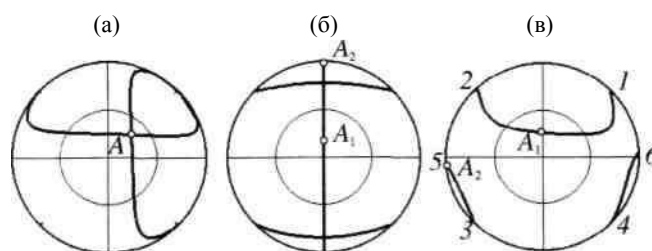


Рис. 4. Осевые линии изогир на полной ортогональной проекции (компьютерное воспроизведение): а - косо сечение одноосного кристалла; б - фигура двойного креста для двуосного кристалла в сечении, перпендикулярном плоскости оптических осей; в - изогир с тремя ветвями в косо сечении двуосного кристалла с $2V = 85^\circ$.

екции в двух противоположных квадрантах, в точках, равноудаленных от координатных осей.

В сечении двуосного кристалла, перпендикулярном плоскости оптических осей, при определенной ориентировке кристалла изогир имеет вид двойного креста (рис. 4б).

В косо сечении двуосного кристалла удивляет присутствие третьей ветви изогир, никогда не наблюдаемой на практике, так как она располагается на краю проекции за пределами поля зрения коноскопа (рис. 4в). Самая крупная *ближняя ветвь* 1—2 проходит через точку выхода оптической оси A_1 , расположенную ближе к центру проекции, чем соответствующая второй оптической оси точка A_2 , с которой связана *дальняя ветвь* 3—5. Третья ветвь 4—6 не проходит через A_1 и A_2 . Концы всех трех ветвей изогир упираются в граничную окружность. Из шести концов изогир четыре (1, 2, 3 и 4) жестко привязаны к фиксированным точкам, удаленным от осей координат на 45° . Эти точки присутствуют на коноскопических картинах любых сечений кристаллов, они неподвижны при вращении столика микроскопа. Концы 5 и 6 мобильные. Их положение зависит от сечения кристалла и угла поворота кристаллической пластинки. На рисунке видно, что изогир, упираясь в край проекции, не прерывается, а находит свое продолжение в противоположной точке на граничной окружности.

На рис. 5 показано, как ведет себя изогир косо сечения двуосного кристалла на полной ортогональной проекции при вращении кристалла. В исходном положении (позиция погасания кристалла) *ближняя ветвь* изогир проходит через центр проекции ($\omega = 0^\circ$). По разные стороны от нее расположены две другие ветви.

При повороте кристалла на угол $0 < \omega < 90^\circ$ *ближняя ветвь* изогир поочередно, соединяясь сначала с ветвью, не имеющей оси ($\omega = 4.7^\circ$), затем с *дальней ветвью* ($\omega = 69^\circ$), образует косо крест. Таким образом, при повороте кристалла на

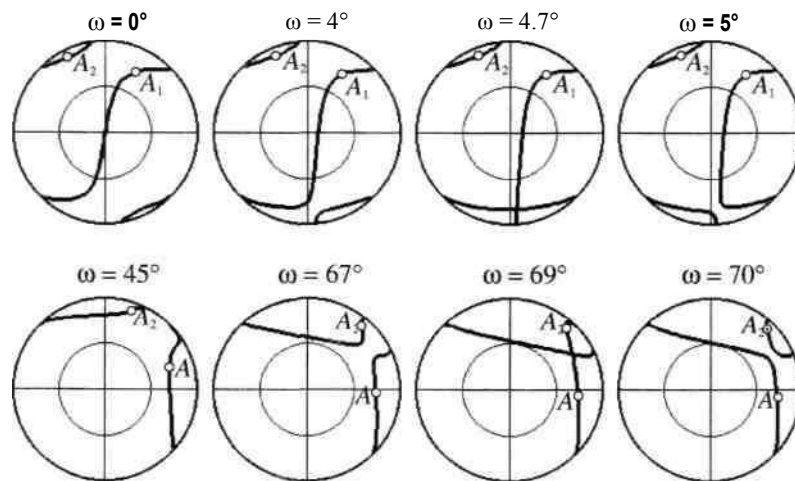


Рис. 5. Изогира на полной ортогональной проекции и ее поведение при вращении столика микроскопа для косоного сечения двуосного кристалла с $2V=47^\circ$. ω - угол поворота кристаллической пластинки от позиции погасания кристалла.

360° крест образуется 8 раз. При работе с обычными объективами фигура креста при полном повороте столика возникает только 4 раза.

Ближняя ветвь изогиры при любых позициях всегда опирается на фиксированные точки и только она может пересекать центр проекции. Две другие ветви опираются одним концом на фиксированную точку, вторым — на подвижную точку, меняющую свое местоположение при вращении кристалла, скользя по окружности, ограничивающей поле проекции.

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ИЗОГИРЫ

В качестве примера применения уравнения изогиры для практических целей приведем описа-

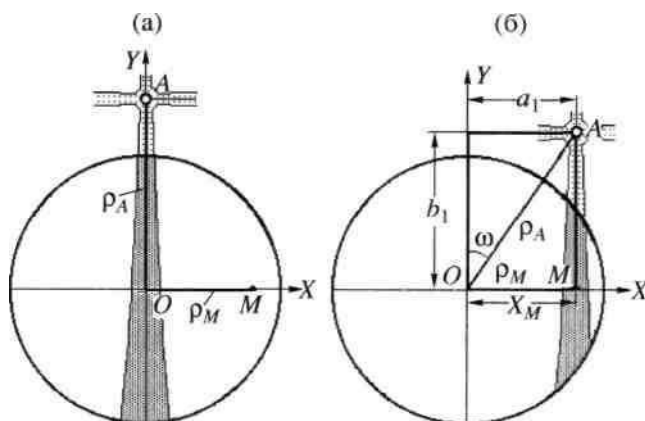


Рис. 6. Измерение наклона оптической оси одноосного кристалла (гномоническая проекция): а - исходное положение (позиция погасания кристалла); б - позиция после поворота столика микроскопа на угол ω .

ние способа коноскопического измерения угла наклона оптической оси одноосного кристалла, предложенного в [14] и использованного для массового замера ориентации оптических осей в зернах кварца с целью выявления предпочтительной ориентировки этого минерала в шлифах горных пород (микроструктурный анализ) [15]. В исходном положении (позиция погасания кристалла) оптическая ось A находится на координатной оси Y за пределами поля зрения коноскопа, следовательно, она недоступна для непосредственного наблюдения и измерения ее наклона ρ_A (дуга OA) с помощью окуляр-микрометра (рис. 6а). Гномонические координаты оптической оси в этой позиции равны: $a_1 = 0$, $b_1 = \text{tg} \rho_A$.

После поворота столика микроскопа на некоторый угол со изогира сместится вправо и достигнет метки M на оси X (рис. 6б). В качестве метки может служить одно из делений шкалы окуляр-микрометра. Ее гномонические координаты: $x = \text{tg} \rho_M$, $y = 0$, где ρ_M - угловое удаление метки от центра O (полярное расстояние), заведомо известное по результатам калибровки шкалы окуляр-микрометра. Координаты точки выхода оптической оси в этой позиции равны:

$$a_1 = \text{tg} \rho_A \sin \omega, \quad b_1 = \text{tg} \rho_A \cos \omega. \quad (13)$$

Так как точка изогиры M находится на оси X ($y = 0$), уравнение (11) принимает вид $(x^2 + 2)(bx - c) = 0$. В этом случае (11) имеет единственный действительный корень

$$x = c/b. \quad (14)$$

Для одноосного кристалла из (12) следует $b = 2b_1$, $c = 2a_1b_1$, из (14) находим $x_M = a_1$. Из этого равенства видно, что при вращении столика микроскопа абсциссы оптической оси A одноосного

кристалла и точки пересечения изогирой оси X всегда равны друг другу, поэтому из (13) найдем

$$\operatorname{tg} \rho_A = \operatorname{tg} \rho_M / \sin \omega \quad (15)$$

Подобная, но значительно более сложная задача определения ориентации оптических осей решена автором для косых сечений двуосного кристалла. Для этого необходимо снять координаты x и y трех точек изогирой, подставить их в уравнение (11), решить систему трех уравнений и найти значения параметров a , b , c и d , зная которые, с помощью (12) можно рассчитать гномонические координаты оптических осей. Последние пересчитываются в сферические координаты и далее по ним графически, на стереографической сетке, или аналитически, по формулам сферической тригонометрии, определяются угол оптических осей и ориентация оптической индикатрисы.

Как известно, применение коноскопического метода связано с рядом ограничений, сужающих его возможности, а именно:

- для измерения угла $2V$ между оптическими осями пригодны только сечения кристалла, ориентированные перпендикулярно острой биссектрисе;
- измеряемый угол $2V$ не должен превышать 50° - 60° ;
- отсутствует возможность определения ориентации оптической индикатрисы.

Использование уравнения изогирой позволяет снять эти ограничения и приблизить возможности коноскопического метода к результатам, получаемым на федоровском универсальном столике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований выведено гномоническое уравнение изогирой. Вопреки существующему представлению оказалось, что оно соответствует не гиперболе, а более сложной кривой линии третьего порядка. Проведено графическое построение осевой линии изогирой при максимальном угловом охвате - 180° . Выявлены необычные формы изогирой и особенности ее поведения при вращении кристалла, ранее не описанные в литературе и не наблюдаемые при рабо-

те с обычными объективами из-за их ограниченной апертуры.

Предложено использовать уравнение изогирой в качестве основы для разработки новых способов измерения угла оптических осей и элементов ориентировки оптической индикатрисы, существенно расширяющих возможности коноскопического метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Michel-Levi A., Lacroix A.* // Les Mineraux des Roches. Librairie Polytechnique. Paris: Baudry. Paris. 1888. P. 94.
2. *Becke F.* // Die Skiodromen. Tscherm. miner. und petr. 1905. Mitt. 24. P. 1.
3. *Wright F.E.* // The methods of petrographic-microscopic research. Washington: Carnegie Institution, 1911. №158. 200 p.
4. *Kamb W.B.* // Am. Mineral. 1958. V. 43. P. 1029.
5. *Татарский В.Б.* // Кристаллооптика и иммерсионный метод исследования минералов. М.: Наука, 1965. 306 с.
6. *Стойбер Р., Морзе С.* // Определение кристаллов под микроскопом. М.: Мир, 1974. 281 с.
7. *Bethke C.M., Birnie R.W.* // Am. Mineral. 1980. V. 65. P. 1294.
8. *Константинова А.Ф., Гречушиников Б.Н., Бокуть Б.В., Валяшко Е.Г.* Оптические свойства кристаллов. Минск: Наука и техника, 1995. 302 с.
9. *Рудой К.А., Набатов Б.В., Строганов В.И. и др.* // Кристаллография. 2003. Т. 48. № 2. С. 359.
10. *Компанейцев В.П.* // Изв. АН КазССР. № 4. 1992. С. 18.
11. *Шубников А.В.* Основы оптической кристаллографии. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 207 с.
12. *Компанейцев В.П.* // Геология Казахстана. № 2. 1995. С. 55.
13. *Корн Г., Корн Т.* // Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с.
14. *Компанейцев В.П.* // Авторское свидетельство № 1566208 "Способ измерения наклона оптической оси одноосного кристалла". Заявл. 26.09.88. Опубл. 23.05.90. Бюлл. № 19. 1990.
15. *Компанейцев В.П.* // Изв. АН КазССР. Сер. геол. 1990. № 6. С. 80.