

В. П. КОМПАНЕЙЦЕВ¹

ТЕОРИЯ ИЗОГИРЫ. II. ПРЯМАЯ КОНОСКОПИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Выведены расчетные формулы и описан алгоритм определения интенсивности белого света в произвольной точке коноскопического поля в зависимости от координат оптических осей кристалла. Осуществлено компьютерное воспроизведение изогиры для любых сечений одно- и двусосных кристаллов при различных углах поворота столика микроскопа.

Calculated formulas are deduced and algorithm of the white light intensity determination for any assumed point of the conoscopic field in relation to crystal optic axis coordinates is described. The computer isogyre reproduction for any section of mono- and biaxial crystals at various angles of the microscope stage rotation is realized.

В геофизике под прямой задачей понимается реконструкция физического поля над аномальным геологическим объектом с известными геометрическими и физическими характеристиками. Аналогичная коноскопическая задача заключается в графическом воспроизведении изогиры, получаемой от кристалла с заданными углом оптических осей и ориентировкой оптической индикатрисы.

В предыдущей статье [1] выведена следующая формула интенсивности белого света B , наблюдаемого в произвольной точке коноскопического поля:

$$B = I_0 \cos^2(v' + v'') \sin^2(v' - v'') \quad (1)$$

где I_0 — начальная интенсивность света, поступающего из поляризатора в кристаллическую пластинку, принимаемая равной 1; v' и v'' — углы, образуемые проекциями направлений световых колебаний n' и n'' в кристаллической пластинке с направлением световых колебаний в анализаторе.

Из формулы (1) видно, что для расчета B необходимо определить направления световых колебаний в кристалле n' и n'' . В кристаллооптике для этой цели используют сферическую поверхность световых колебаний, физической моделью которой является шар с нанесенными на нем выходами оптических осей и линиями, указывающими направле-

¹ Казахстан. 480091. Алматы, ул. Богенбай батыра, 114, Казахский научно-исследовательский институт минерального сырья, НПО «Казнедра».

ния колебания света (шар Бера) [2]. В коноскопии для построения изогиры обычно используют ортографическую проекцию шара Бера на плоскость, на которой получают неискаженную коноскопическую картину, адекватную реально наблюдаемой в микроскопе.

В картографии [3] известны три типа ортографической проекции шара на плоскость: нормальная (полярная), поперечная (экваториальная) и косая, выделяемые по положению полюса сферических координат — в центре, на краю и в любых других точках проекции (рис. 1).

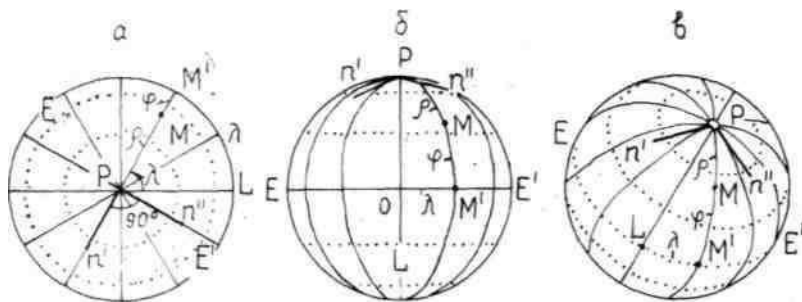


Рис. 1. Типы ортографической проекции шара на плоскость: *a* — полярная, *б* — экваториальная, *в* — косая. *P* — полюс градусной сетки, *EE'* — экватор, *O* — центр проекции, *M* — точка со сферическими координатами: полярным расстоянием ρ , долготой λ и широтой φ ; *M'* — точка пересечения меридиана точки *M* с экватором, *n'* и *n''* — проекции направлений световых колебаний. *PE* — нулевой меридиан. Точечными линиями показаны широты

В первом случае меридианы имеют вид прямых линий, в двух других — эллипсов, пересекающихся в точке полюса *P*. Положение произвольной точки *M* на проекции определяется двумя сферическими координатами: долготой λ и полярным расстоянием ρ (или заменяющей его широтой φ , причем $\rho + \varphi = 90^\circ$).

Световые колебания в кристалле, согласно теореме Френеля, совершаются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, линия пересечения которых соответствует направлению распространения света. В случае прохождения луча света через полюс на полярной проекции направления световых колебаний *n'* и *n''* совпадают с меридианами, и, следовательно, сохраняют прямой угол между собой (см. рис. 1, *a*). В двух других случаях угол между проекциями направлений световых колебаний *n'* и *n''*, являющимися касательными к эллипсам (проекциям меридианов) в точке полюса *P*, в общем случае не равен 90° , т. е. эти направления передаются с искажениями (см. рис. 1, *б*, *в*).

Задачу определения ориентировки направлений световых колебаний в кристалле решаем в два этапа: 1) на сферической поверхности световых колебаний (в сферических координатах) и 2) на ортографической проекции сферы на плоскость.

Определение направлений световых колебаний в кристаллической пластинке в сферических координатах. Пусть в исходной позиции мы имеем полярную ортографическую проекцию шара, на которую нанесены полюс сферических координат *P*, оптические оси $A_1(\rho_1, \lambda_1)$ и $A_2(\rho_2, \lambda_2)$ и произвольная точка $M(\rho_M, \lambda_M)$, в которой необходимо определить направления световых колебаний (рис. 2). В скобках указаны сферические координаты: полярное расстояние ρ и долгота λ , которая отменя-

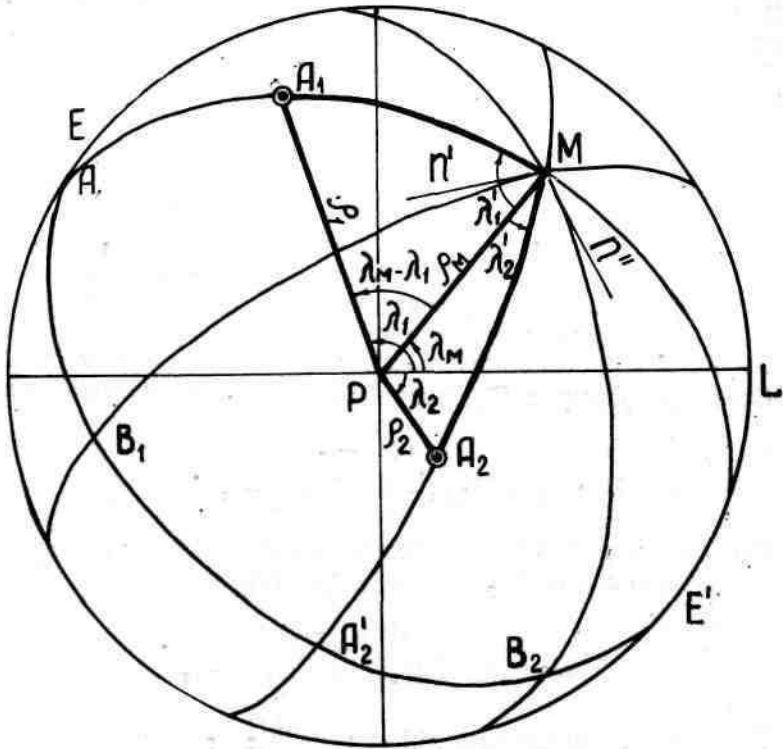


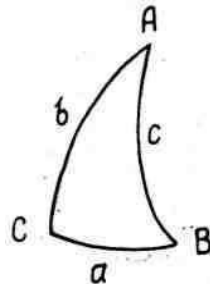
Рис. 2. Определение направлений световых колебаний в двуосном кристалле в сферических координатах

ется от нулевого меридиана PL со знаком плюс против хода часовой стрелки и минус — в противоположном направлении.

Перенесем полюс сферических координат из центра проекции P в точку M и таким образом перейдем от полярной к косой ортографической проекции. Определим новые сферические координаты оптических осей. Для этого используем одну из формул сферической тригонометрии [4]:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin B}{\sin c \operatorname{ctg} a - \cos c \cos B} \quad (2)$$

Рис. 3. Элементы сферического треугольника: a, b и c — стороны, A, B и C — углы между сторонами



Здесь a и c — стороны сферического треугольника ABC (рис. 3), являющиеся дугами большого круга и получаемые на сфере при ее пересечении плоскостями, проходящими через центр сферы; A , B и C — углы между сторонами сферического треугольника. Заметим, что стороны сферического треугольника выражены не в линейных, а угловых единицах (градусах или радианах).

Принимаем дугу PM за новый нулевой меридиан (см. рис. 2). Из точки M через оптические оси A_1 и A_2 проводим меридианы MA_1 и MA_2 до их пересечения с новым экватором EE' в точках A_1' и A_2' . В сферическом треугольнике PA_1M угол λ_1' является новой долготой оптической оси A_1 . В этом треугольнике известны стороны $A_1P = \rho_1$, $MP = \rho_m$ и угол между ними, равный разности долгот $\lambda_m - \lambda_1$ точек M и A_1 . Все величины даны в системе исходных полярных сферических координат.

Согласно формуле (2), новая долгота λ_1' оптической оси A_1 равна

$$\operatorname{tg} \lambda_1' = \frac{\sin(\lambda_m - \lambda_1)}{\sin \rho_m \operatorname{ctg} \rho_1 - \cos \rho_m \cos(\lambda_m - \lambda_1)} \quad (3)$$

По аналогичной формуле решаем сферический треугольник PA_2M и находим новую долготу λ_2' оптической оси A_2 :

$$\operatorname{tg} \lambda_2' = \frac{\sin(\lambda_m - \lambda_2)}{\sin \rho_m \operatorname{ctg} \rho_2 - \cos \rho_m \cos(\lambda_m - \lambda_2)} \quad (4)$$

В плоскости меридианов MA_1A_1' и MA_2A_2' лежат оптические оси A_1 и A_2 и заданное направление луча света M . Следовательно, плоскости этих меридианов являются главными сечениями оптической индикатрисы.

Согласно теореме Френеля, в двуосных кристаллах световые колебания совершаются по биссектрисам углов между главными сечениями [5]. Для нахождения первой биссектрисы дугу $A_1'A_2'$ на экваторе делим пополам (точка B_1) и проводим меридиан MB_1 . Долгота этого меридиана

$$\lambda' = (\lambda_1' + \lambda_2')/2 \quad (5)$$

определил первое направление световых колебаний в кристалле.

Второе направление световых колебаний перпендикулярно первому. Для его построения на экваторе EE' от точки B_1 нужно отложить дугу $B_1B_2 = 90^\circ$ и провести меридиан MB_2 , долгота которого

$$\lambda'' = \lambda' \pm 90^\circ \quad (6)$$

Определение направлений световых колебаний в кристалле на ортографической проекции. В коноскопии мы имеем дело не со сферической поверхностью световых колебаний, как таковой, а с ее ортографической проекцией на плоскость [6]. На этой проекции плоскости световых колебаний, дающие при пересечении со сферой большие круги, выглядят как эллипсы, а направления световых колебаний n' и n'' — как касательные к эллипсам в заданной точке M (рис. 4, а). Заметим, что на сфере биссектрисы MB_1 и MB_2 всегда взаимно перпендикулярны, в то время как

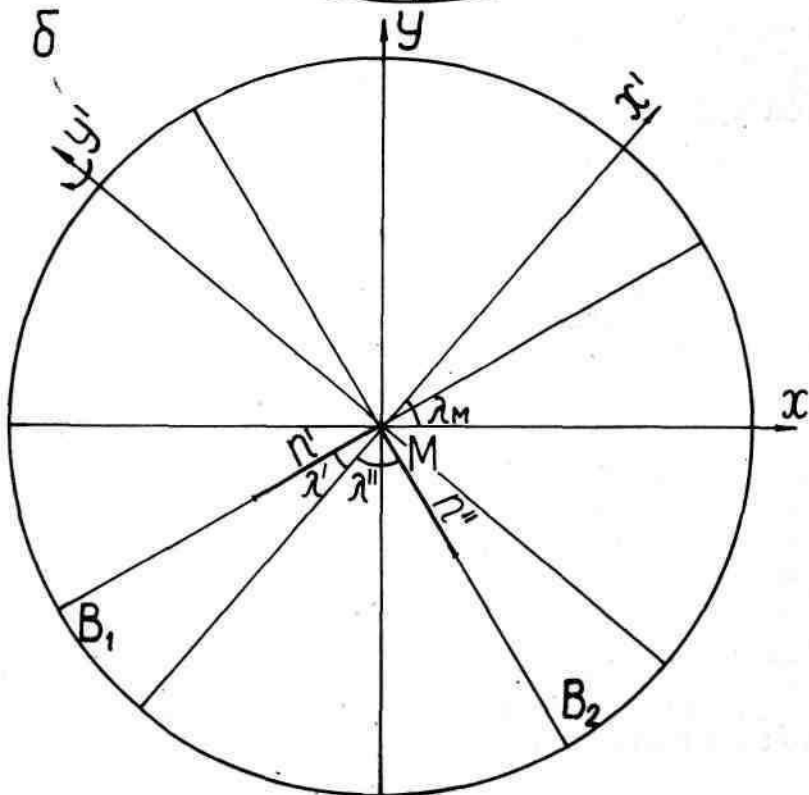
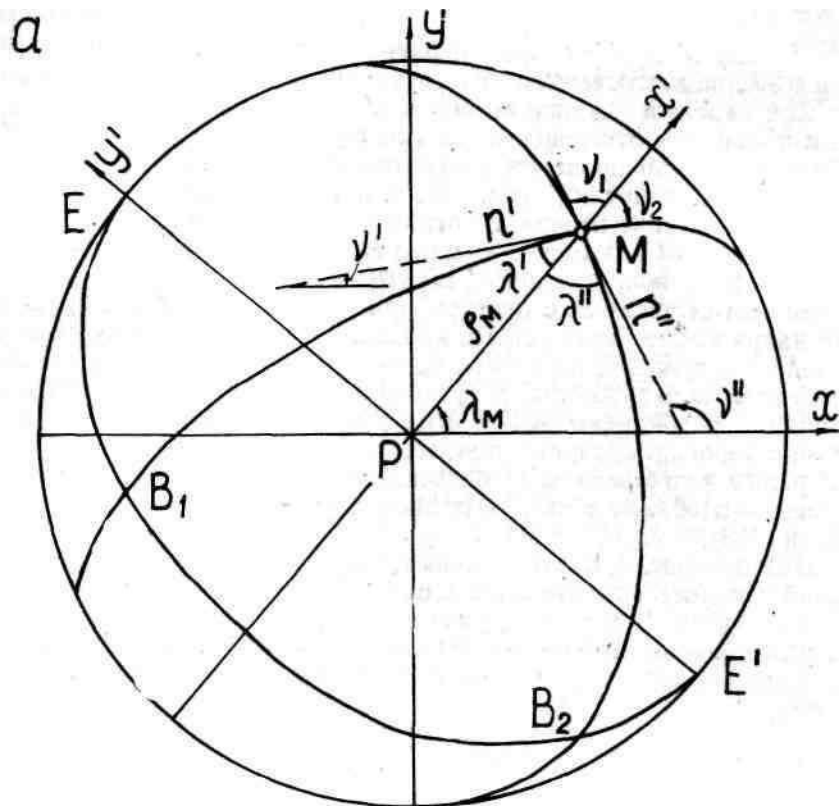


Рис. 4. Определение направлений световых колебаний в двуосном кристалле на ортографической проекции: *a* — исходная позиция, *b* — после поворота кристалла вокруг оси Y на угол ρ_M

углы между n' и n'' на ортографической проекции в общем случае не равны 90° , за исключением центра проекции, где они всегда прямые.

Для определения ориентировки n' и n'' осуществим переход от косо́й к полярной ортографической проекции, для чего через новый нулевой меридиан PM проведем новую ось абсцисс PX' , а перпендикулярно к ней — ось ординат PY' (см. рис. 4, *a*). Новые оси прямоугольных координат на рисунке повернуты относительно старых на угол λ_M , равный долготе точки M в исходной системе сферических координат. Затем вращением сферы вокруг оси PY' на угол ρ_M (полярное расстояние точки M) совместим точку M с центром проекции P (см. рис. 4, *б*). В результате направление луча света, проходящего через точку M , окажется перпендикулярным к плоскости чертежа, биссектрисы B_1 и B_2 сместятся на граничную окружность, а проходящие через них плоскости световых колебаний (меридианы MB_1 и MB_2) на проекции будут иметь вид двух взаимно перпендикулярных прямых линий, углы наклона которых к оси MX' равны долготам λ' и λ'' биссектрис B_1 и B_2 . Проекции направлений световых колебаний n' и n'' в данном случае совпадают с меридианами MB_1 и MB_2 .

Позиции рис. 4, *a* и *б* отличаются друг от друга различной ориентировкой плоскости, касательной к сфере, в которой лежат векторы световых колебаний. В первом случае она наклонена к плоскости проекции под углом ρ_M , во втором — параллельна ей. Из проективной геометрии [7] известно, что плоский угол α и его проекция α' связаны зависимостью

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha / \cos \beta,$$

где β — угол между плоскостью, в которой лежат стороны проектируемого угла α , и плоскостью проекции. С учетом этой формулы углы v_1 и v_2 , образуемые проекциями направлений световых колебаний n' и n'' с осью OX' будут

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} v_1 &= \operatorname{tg} \lambda' / \cos \rho_M, \\ \operatorname{tg} v_2 &= \operatorname{tg} \lambda'' / \cos \rho_M. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (6), последнюю формулу можно записать в другом виде:

$$\operatorname{tg} v_2 = -1 / (\operatorname{tg} \lambda' \cos \rho_M).$$

Новая ось абсцисс OX' повернута относительно старой OX на угол λ_M . Поэтому углы v' и v'' , образуемые n' и n'' с осью OX :

$$\begin{aligned} v' &= v_1 + \lambda_M, \\ v'' &= v_2 + \lambda_M. \end{aligned}$$

Таким образом, задача определения ориентировки проекций направлений световых колебаний n' и n'' в кристалле решена. Значения v' и v'' могут быть использованы для расчета по формуле (1) интенсивности белого света в любой точке коноскопического поля.

Изофосы. Если расчеты сделаны по некоторой достаточно густой сети точек и по ним с помощью интерполяции провести линии одинаковой интенсивности белого света, называемые *изофосами*, то результирующий чертеж даст полное представление о распределении белого света в поле

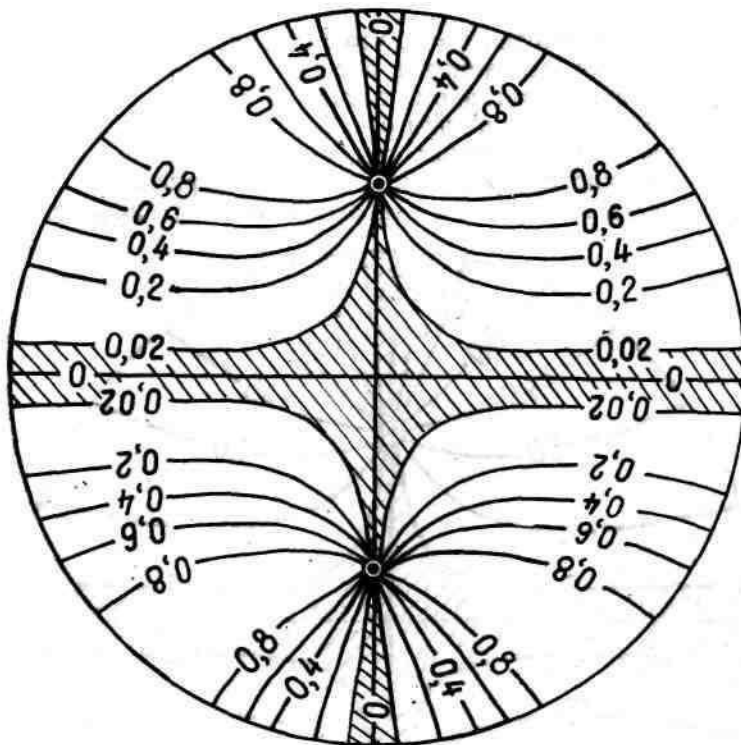


Рис. 5. Изофосы двуосного кристалла с $2V=30^\circ$ в сечении, перпендикулярном острой биссектрисе. В качестве изогиры условно выделена заштрихованная область с $B < 0,02$.

зрения коноскопа (рис. 5). Положение и форма изогиры на нем могут быть определены по изофосам с минимальным значениям B . На рисунке за контур изогиры условно принята изофоса 0,02.

Изаллоклины. Из главной коноскопической теоремы [1], следует, что нулевой интенсивности белого света соответствуют точки коноскопического поля, в которых биссектрисы проекций направлений световых колебаний в кристалле и николях совпадают, т. е. угол между биссектрисами равен нулю:

$$\gamma = (v' + v'') / 2 \pm 45^\circ.$$

Здесь $(v' + v'') / 2$ — угол, образуемый биссектрисой угла между n' и n'' с осью X ; ± 45 — аналогичный угол для биссектрисы световых колебаний в николях.

Чтобы избежать путаницы со знаком величину γ лучше определять по формуле

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{\operatorname{tg} \gamma' \operatorname{tg} \gamma'' - 1}{\operatorname{tg} \gamma' + \operatorname{tg} \gamma''}.$$

При соблюдении условия $\gamma = 0$, что характерно для точек изогир, можно говорить о согласованности биссектрис световых колебаний в кристалле и николях. В противном случае γ является мерой угловой рассогласованности биссектрис или сокращенно углом рассогласования.

Изаллоклины — линии равных углов рассогласования биссектрис, как и изофосы, можно построить по результатам расчета γ по определенной сети точек в поле зрения коноскопа (рис. 6). Обращает на себя внима-

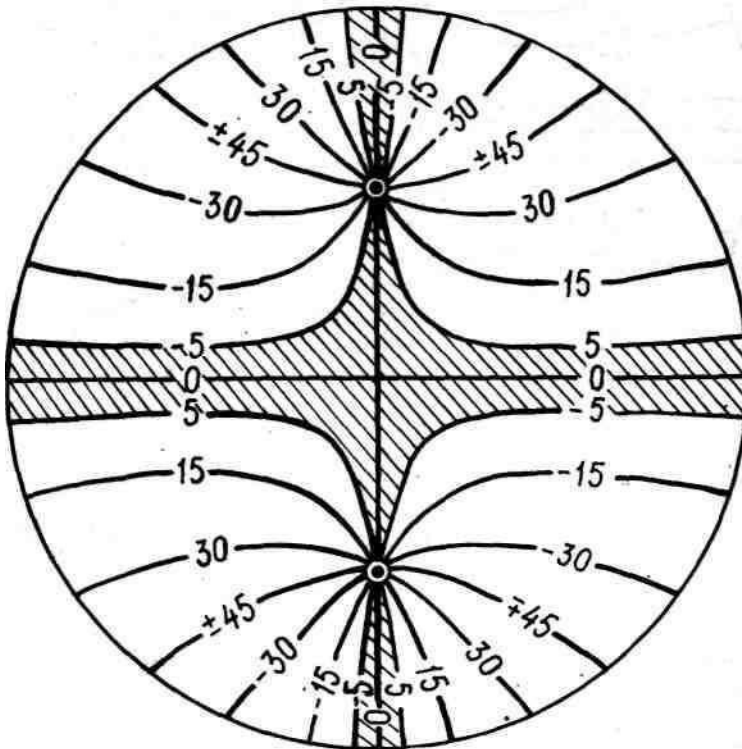


Рис. 6. Изаллоклины для того же кристалла, что и на рис. 5. Заштрихованная область между изолиниями ± 5 и ± 5 условно выделена в качестве изогир

ние сходство конфигурации изаллоклин и изофос (см. рис. 6), хотя полного совпадения между ними нет. Те и другие пересекаются в точках оптических осей A_1 и A_2 , но изаллоклины при этом обнаруживают инверсию знака угла рассогласования.

Изаллоклина $\gamma = 0$ точно определяет положение осевой линии изогир как линии с нулевой интенсивностью белого света. За приближенный контур изогир может быть условно принята одна из линий равных углов рассогласования, например изаллоклина ± 5 на рис. 6.

Углы рассогласования по сравнению с интенсивностью белого све-

та, помимо некоторого сокращения объема вычислительных операций, имеют одно важное преимущество — их знак меняется на обратный при пересечении нулевого значения, что облегчает программирование и ускоряет автоматический поиск координат изогир при расчетах на компьютере.

Компьютерное воспроизведение изогир. Массовая обработка коноскопических данных для графического построения изогир возможна лишь с применением современной электронно-вычислительной техники. Для этой цели был использован электронно-вычислительный комплекс ВУМС-001 с микроЭВМ «Электроника ДЗ-28». Программа компьютерного воспроизведения изогир, написанная на одной из версий языка ФОРТРАН IV, предусматривает:

- 1) ввод исходных данных — радиус поля зрения коноскопа и сферические координаты оптических осей;
- 2) последовательную пошаговую смену позиции маркера на экране дисплея и перевод строки;
- 3) пересчет адреса маркера (номер строки и номер позиции в строке) в прямоугольные и затем в сферические координаты;
- 4) расчет интенсивности белого света в точке коноскопического поля, соответствующей текущему адресу маркера;

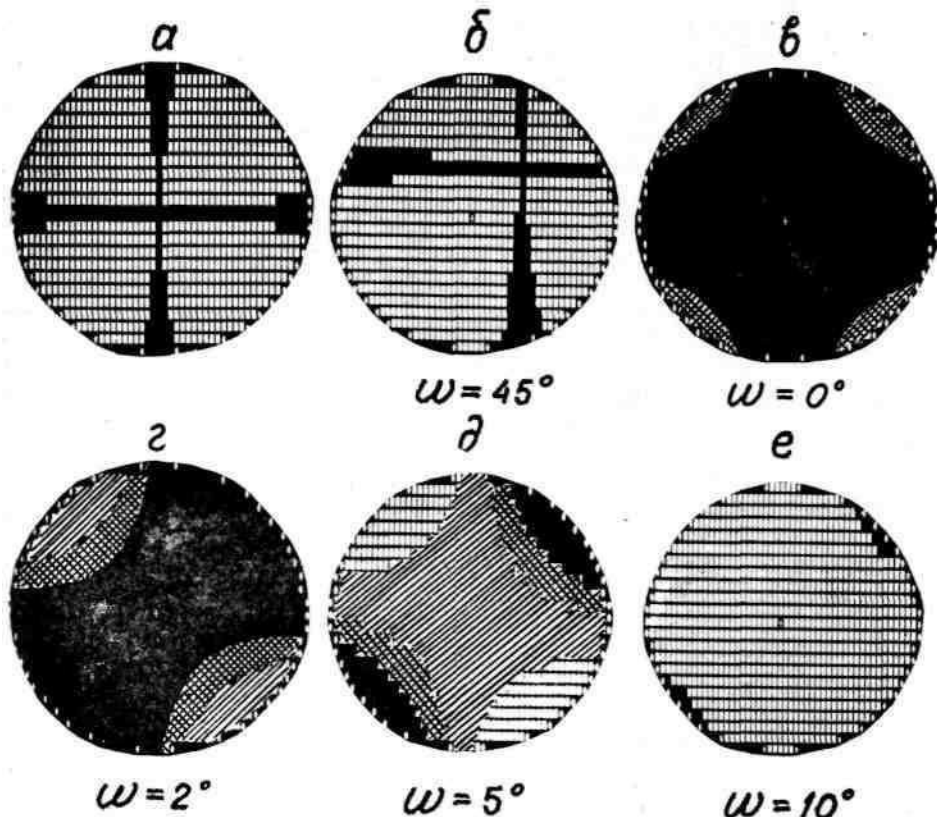


Рис. 7. Компьютерное воспроизведение изогир одноосного кристалла (фотографии с экрана дисплея): *a* — сечение, перпендикулярное оптической оси; *b* — сечение, наклонное к оптической оси; *v* — *e* — сечение, параллельное оптической оси при разных углах поворота столика микроскопа ω

5) вывод на экран дисплея знака в зависимости от интенсивности белого света в данной точке коноскопического поля.

Светлые участки коноскопического поля с интенсивностью $B > 0,05$ обозначались знаком «забой», темные с $B < 0,02$ (изогира) — знаком «пробел». Кроме того, для некоторых сечений кристаллов потребовался дополнительный знак — «косая черта» при $B = 0,01—0,02$.

Плотность расчетных точек ограничивалась техническими возможностями дисплея — 24 строки по 80 знаков в каждой из них. Но так как круглое коноскопическое поле занимало лишь часть прямоугольного экрана, фактически развертка изображения изогир происходила по 23 строкам с максимальным количеством знаков в строке до 49 по диаметру коноскопического поля.

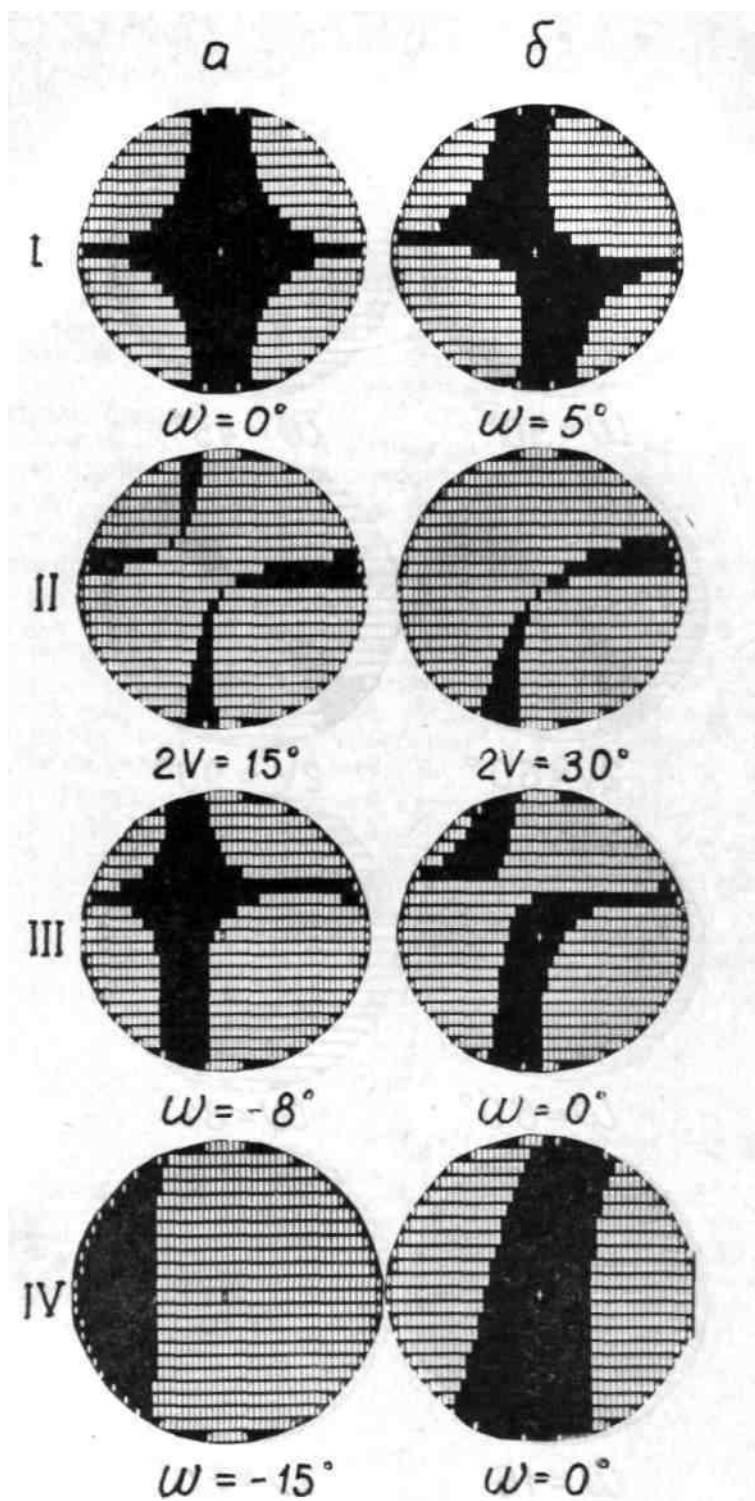
На рис. 7, 8 приведены фотографии с экрана дисплея, на которых изображены изогир для кристаллов с различными углами оптических осей, ориентировкой оптической индикатрисы и углами поворота столика микроскопа. Не останавливаясь на подробном описании, отметим некоторые наиболее примечательные черты формы изогир и ее поведения при вращении столика микроскопа.

Для одноосного кристалла в сечении, параллельном плоскости оптических осей (см. рис. 7, *в* — *е*), интерференционная фигура представляет собой толстый крест *в*, трансформирующийся при повороте столика микроскопа в косую сноповидную фигуру *г*, которая, все более сжимаясь, при $\omega = 5^\circ$ разрывается светлой перемычкой с образованием двух ветвей изогир *д*, покидающих поле зрения коноскопа при $\omega = 10^\circ$.

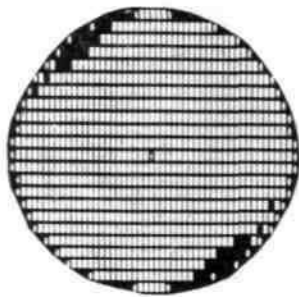
В верхнем ряду рис. 8 показано поведение изогир при вращении столика микроскопа для двуосного кристалла с $2V=60^\circ$ в сечении, перпендикулярном острой биссектрисе. Обращает на себя внимание, в отличие от одноосного кристалла (см. рис. 7, *а*), разная толщина горизонтальной и вертикальной составляющих креста. Во втором ряду — изогир, получаемые от двуосных кристаллов с $2V=15, 30, 60$ и 90° в сечении, перпендикулярном оптической оси. Отчетливо прослеживается уменьшение кривизны изогир при увеличении угла оптических осей — закономерность, использованная Ф. Райтом при составлении диаграммы для определения величины угла оптических осей (рис. 9). В третьем ряду рис. 8 показано поведение изогир двуосного кристалла с косоориентированной острой биссектрисой, находящейся в поле зрения коноскопа. От изогир верхнего ряда она отличается косым расположением креста и несимметричностью ветвей изогир. В нижнем ряду рисунка изображена изогир двуосного кристалла в косом сечении, при котором острая биссектриса находится за пределами поля зрения коноскопа. Толстая, слегка искривленная изогир уходит из поля зрения без образования креста.

О достоверности математической модели изогир. Для проверки соответствия теоретической и реально наблюдаемой изогир на федоровском столике замерялись координаты оптических осей в зернах различ-

Рис. 8. Компьютерное воспроизведение изогир двуосного кристалла (фотографии с экрана дисплея) в разных сечениях и при различных углах поворота столика микроскопа ω : верхний ряд — сечение, перпендикулярное острой биссектрисе, $2V = 60^\circ$; второй ряд — сечение, перпендикулярное оптической оси, $2V = 15, 30, 60$ и 90° ; третий ряд — косое сечение, одна из оптических осей находится в поле зрения коноскопа, плоскость оптических осей наклонена под углом 80° к столику микроскопа, $2V = 45^\circ$; нижний ряд — косое сечение, оптические оси вне поля зрения коноскопа, плоскость оптических осей наклонена под углом 45° к столику микроскопа, $2V = 60^\circ$ (см. стр. 65, 66)



б



$\omega = 30^\circ$

2



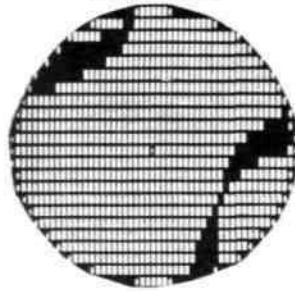
$\omega = 45^\circ$



$2V = 60^\circ$



$2V = 90^\circ$



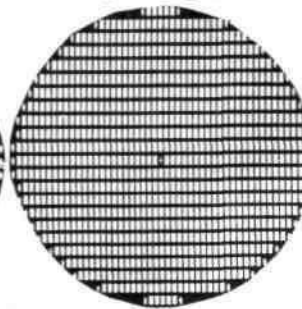
$\omega = 60^\circ$



$\omega = 81^\circ$



$\omega = 15$

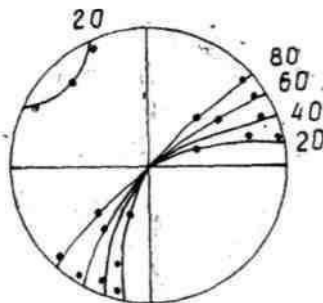


$\omega = 30^\circ$

ных минералов. По полученным координатам проводилось графическое построение изогир. Затем то же зерно минерала исследовалось в коноскопе. Сравнение положения и формы изогир при разных углах поворота столика микроскопа привело к выводу о полной идентичности теоретической и реально наблюдаемой изогир.

На рис. 9 приведена широко известная диаграмма Ф. Райта, модифицированная М. Флейшером и соавт. [8], предназначенная для определения угла оптических осей в сечении, перпендикулярном оптической оси. На нее нанесены точки с нулевой интенсивностью белого света, рассчитанные по методике, описанной в этой статье. Как видно, положение расчетных точек и линий изогир практически совпало. Незначительные отклонения точек от линий можно объяснить погрешностями, связанными с тем, что Ф. Райт для построения диаграммы использовал приближенное уравнение изогир.

В заключение остановимся на практическом значении математической модели изогир. Изложенные теоретические разработки дают возможность на строгой математической и физической основе предсказать положение и форму изогир и имитировать ее поведение при вращении столика микроскопа для любых сечений кристаллов. Все это может быть использовано в учебных целях для демонстрации изогир студентам при прохождении курса кристаллооптики. При этом, если в расчетах учесть цветную составляющую света, на экране дисплея можно воспроизвести полную коноскопическую картину, включая изохромы,



а также показать действие кварцевой пластинки при определении оптического знака кристалла. Рис. 9. Положение расчетных точек с нулевой интенсивностью белого света на диаграмме Ф. Райта

Разработке на основе математической модели изогир новых способов коноскопического измерения угла оптических осей и ориентировки оптической индикатрисы будет посвящена следующая статья.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Компанейцев В. П.* Теория изогир. I. Главная коноскопическая теорема // Изв. АН РК. Сер. геол. 1992. № 4. С. 18-27.
2. *Елисеев Н. А.* Методы петрографических исследований. Л., 1956. 275 с.
3. *Гинзбург Г. А.* Картографические проекции. М., 1951. 79 с.
4. *Вольнский Б. А.* Сферическая тригонометрия. М., 1977. 135 с.
5. *Татарский В. Б.* Кристаллооптика и иммерсионный метод исследования минералов. М., 1965. 306 с.
6. *Kamb W. B.* Isogyres in interference figures // Am. Mineral. 1958. V. 43. P. 1029-1067.
7. *Глаголев Н. А.* Проективная геометрия. М., 1963. 344 с.
8. *Флейшер М., Уилкокс Р., Матцко Дж.* Микроскопическое определение прозрачных минералов. Л., 1987. 647 с.